ҮШ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР
1 Анықтама

Бұл тақырып үш айнымалылардан тәуелді болған жағдайдағы анықталған интегралдарды жалпылайды.

Тұйық кеңістіктік облысының барлық нүктелерінде $f(x,y,z)$ функциясы анықталсын. T облысын еркті түрде қарапайым (T_1), (T_2), …, (T_n) көлемдері ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n болатын бөліктерге бөлейік. Әрбір бөліктен кез келген (ξ_i,η_i,ζ_i) нүктесін және сәйкесінше $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ мәнін есептеп, $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta V_i$ көбейтіндісін тауып, барлық i бойынша қосындысын тапсақ:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i \qquad \textbf{(1)}$$

λ –ең үлкен диаметрі болсын.

<u>Анықтама.</u> Егер (1) интегралдық қосындысының T тұйық үшөлшемді облысының бөліктену жолдарынан, сондай-ақ (ξ_i,η_i,ζ_i) нүктесінің таңдап алынуынан тәуелсіз, $\lambda\to 0$ ақырлы шегі табылса, онда ол $f(x,y,z)$ функциясының үш <u>еселі интеграл</u> деп аталынып, былай белгіленеді:

$$J = \lim_{\lambda\to 0} I_n = \iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz \qquad \textbf{(2)}$$

$f(x,y)$ функциясы T облысындағы интеграл астындағы функция.

Үш еселі интегралдың геометриялық мағынасы:

$m = \iiint\limits_T \mu(x,y,z)dV$ – T денесінің массасы, мұндағы $\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ функциясы дененің тығыздығы, ал V – көлем.

2. Үш еселі интегралдың қасиеттері

1). Еселі интегралдың мәні интегралдағы айнымалылардың белгіленуінен тәуелді болмайды:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T)} f(U,V,W)dUdVdW$$

2). Тұрақты көбейткішті интегралдың алдына шығаруға болады:

$$\iiint\limits_{(T)} kf(x,y,z)dxdydz = k\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$$

3). Функциялардың алгебралық қосындысының еселі интегралы еселі интегралдың алгебралық қосындысына тең:

$$\iiint\limits_{(T)} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y,z)dxdydz = \sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{(T)} f_i(x,y,z)dxdydz$$

4). Егер $(T)=(T_1)+(T_2)$ болса, онда

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T_1)} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{(T_2)} f(x,y,z)dxdydz$$

5). Егер (T) облысында: $f_1(x,y,z) \leq f_2(x,y,z)$, онда $\iiint\limits_{(T)} f_1(x,y,z)dV \leq \iiint\limits_{(T)} f_2(x,y,z)dV$

6). Егер (T) облысында: $f_1(x,y,z) \geq 0$, онда $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dV \geq 0$

7). Егер $f(x,y,z)$ функциясы (T) облысында интегралданатын болса, онда $\left|\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dV\right| \leq \iiint\limits_{(T)} |f(x,y,z)|dV$

8) Егер (T) облысында $f_1(x,y,z) \equiv 1$, онда $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dV = V(T)$, мұндағы V – көлем.

9). Орта туралы теорема. Егер $f(x,y.z)$ функциясы тұйық, шектелген көлемі V болатын (T) облысында үзіліссіз болса, онда осы облыста тек бір ғана $Q(\xi,\eta,\zeta)$ нүктесі табылып, ол төмендегідей болады: $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dV = f(\xi,\eta,\zeta)V$

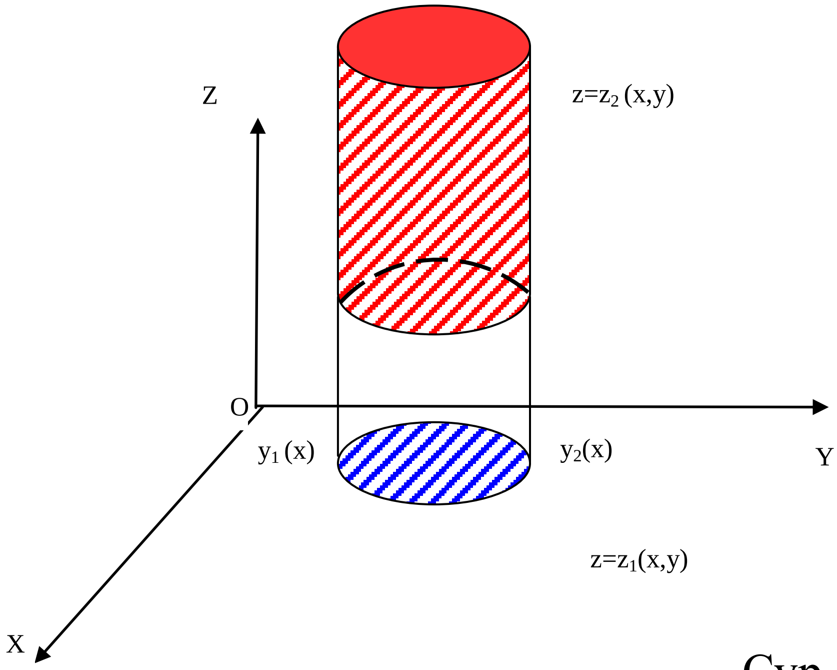
$f(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dV$ – $f(x,y,z)$ функциясының (T) облысындағы орта мәні.

3 Үш еселі интегралдардың есептелінуі

<u>Теорема</u>. Егер T денесінің көлемі V болатын тұйық және S: $z=\psi(x,y)$ және $z=\varphi(x,y)$ жазықтықтарымен шектелген, әрі $\psi(x,y) \geq \varphi(x,y)$ және T облысында үзіліссіз болса, онда

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{(P)} dP \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$$

V облысы жоғарғыдан $z=z_2(x,y)$, төменнен $z=z_1(x,y)$ бетімен және Oz осіне параллель $x_1 \leq x \leq x_2, y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x)$ теңсіздіктермен анықталған Dxy облысының Oxy жазықтығын қиып өтетін бүйір-цилиндрлік бетімен шектелген (сур.1).



Сур. 1

3.4 Үш еселі интегралдардың қолданбалары.

1. Кеңістіктік денелердің массасын есептеу:

$$m = \iiint\limits_{(T)} \mu(x, y, z)dxdydz ,$$

мұндағы $\mu = \mu(x,y,z)$ – тығыздық функциясы

2. Дененің көлемін есептеу: $V = \iiint\limits_{(T)} dxdydz$.

3. Координаталық жазықтықтың қатысты статистикалық моменті:

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(T)} x\mu(x, y, z)dxdydz, \quad M_{zx} = \iiint\limits_{(T)} y\mu(x, y, z)dxdydz, \quad M_{xy} = \iiint\limits_{(T)} z\mu(x, y, z)dxdydz$$

4. Массаның координаталық центрі – $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{zx}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} .$$

5. Координат остеріне қатысты инерция моменті:

$$J_x = \iiint\limits_{(T)} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$J_y = \iiint\limits_{(T)} (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$J_z = \iiint\limits_{(T)} (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)dxdydz$$

Егер дене біртекті болса, онда $\mu \equiv 1$.